

Sujet :**METHODES QUANTITATIVES****SUJET DE MATHÉMATIQUES**

Durée : 2 heures – Coefficient : 0,5

PROBLEME 1

Le 1/1/n une entreprise a emprunté 1 000 000 € au taux annuel de 5 %.

Elle veut rembourser en 5 ans.

Trois formules sont possibles : l'entreprise choisira celle qui minimise le total des intérêts.

1) Première formule

Le remboursement s'effectue au moyen de 5 annuités constantes, la première survenant le 1/1/(n+1).

Quel est le montant de ces annuités ? Quel est le total des intérêts payés ?

2) Deuxième formule

Le remboursement a lieu suivant la règle des emprunts indivis avec des amortissements constants de 200 000 €.

Il y a 5 annuités, la première survenant le 1/1/(n+1).

Compléter le tableau d'amortissement figurant en annexe.

3) Troisième formule

L'entreprise rembourse :

300 000 € le 1/1/(n+2)

400 000 € le 1/1/(n+3)

le solde M est versé le 1/1/(n+5).

Ecrire l'équation qui assure l'équivalence entre la somme empruntée et les sommes remboursées en actualisant au 1/1/n.

En déduire la valeur de M ; préciser le total des intérêts payés

4) Conclure sur la décision de l'entreprise

PROBLEME 2

I) Une entreprise produit trois types d'objets a, b et c.

La fabrication de ces objets impose leur passage dans trois ateliers successifs notés A1, A2, A3.

Le tableau ci-dessous, dit tableau de production, indique le nombre d'heures nécessaires pour la fabrication de chaque objet, ainsi que le volume hebdomadaire disponible dans chaque atelier.

Objets	Ateliers	A1	A2	A3
a		1	5	2
b		1	3	7
c		2	4	1
Total horaire hebdomadaire disponible		160	500	350

(La fabrication de l'objet b nécessite un passage d'une heure en A1, de trois heures en A2, de sept heures en A3, etc...).

Les questions 1, 2, 3 étudient trois situations différentes au cours d'une semaine.

1) On produit 50 objets a et 50 objets c. Combien peut-on alors produire d'objets b et quelles sont dans ce cas les ressources horaires encore disponibles dans chaque atelier ?

2) Peut-on produire 85 objets a et 25 objets b ? Pourquoi ne peut-on alors produire d'objets c ?

3) On note x le nombre d'objets a, y le nombre d'objets b, z le nombre d'objets c que l'entreprise produit au cours d'une semaine donnée.

Il est souhaitable que les ateliers A1, A2, A3 utilisent leurs stocks horaires hebdomadaires en totalité.

Déterminer la production qui satisfait cette condition en résolvant le système suivant :

$$x + y + 2z = 160$$

$$5x + 3y + 4z = 500$$

$$2x + 7y + z = 350$$

4) Les objets a, b, c sont vendus avec une marge de respectivement 600, 400, 200 euros. Déterminer les marges hebdomadaires associées aux 3 productions étudiées (voir questions 1,2 et 3).

II) A la suite d'une restructuration l'entreprise ne fabrique plus que les objets a et b avec deux ateliers A et B.

Le tableau de production est alors suivant :

Objets	Ateliers	A	B
a		4	6
b		4	3
Total horaire disponible		400	525

(La fabrication de l'objet a requiert un passage de 4 heures dans l'atelier A, de 6 heures dans l'atelier B, etc...)

1) Ecrire sous forme d'inéquations le système des contraintes concernant la fabrication de x objets a et de y objets b au cours d'une semaine donnée.

2) Représenter graphiquement les droites (D) et (D') d'équations respectives

$$x + y = 100 \quad \text{et} \quad 2x + y = 175$$

(Utiliser le repère de la feuille annexe), préciser les coordonnées de leur point d'intersection I.

Indiquer, au moyen de hachures la partie du plan représentant les solutions graphiques du système figurant à la question II)1).

3) Les objets a et b sont vendus avec une marge de respectivement 600 et 400 euros. On note W la marge procurée par la vente de x objets a et de y objets b au cours d'une semaine donnée.

Exprimer W en fonction de x et y.

Tracer la droite (Δ) correspondant au cas particulier $W = 50\,000$ dans le repère ci-dessus.

Quelle est la production qui maximise W ? Justifier votre réponse. Quelle est la marge maximale ?

PROBLEME 1

1) Remboursement par 5 annuités constantes

- Calcul de l'annuité constante

$$\Rightarrow A = Cn * \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \Rightarrow A = 1\ 000\ 000 * \frac{0,05}{1 - (1,05)^{-5}}$$

$$\Rightarrow A \approx 230\ 974,8$$

- Calcul du total des intérêts payés

	Capital restant dû en début de période	Intérêt	Amortissement	Annuités constantes
1/1 (n+1)	1 000 000,00	50 000,00	180 974,00	230 974,8
1/1 (n+2)	819 025,00	40 951,26	190 023,00	230 974,8
1/1 (n+3)	629 001,00	31 450,08	199 524,00	230 974,8
1/1 (n+4)	429 476,00	21 473,80	209 500,00	230 974,8
1/1 (n+5)	219 976,00	10 998,80	219 976,00	230 974,8
	TOTAL	154 874,00		1 154 874,0

$$\Rightarrow \text{La somme des intérêts} \approx 154\ 874\ \text{€}$$

2) Remboursement par 5 amortissements constants

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
1	1 000 000	50 000	200 000	250 000
2	800 000	40 000	200 000	240 000
3	600 000	30 000	200 000	230 000
4	400 000	20 000	200 000	220 000
5	200 000	10 000	200 000	210 000
TOTAL		150 000		1 150 000

3) Equation

$$1\ 000\ 000 = \frac{300\ 000}{(1,05)^2} + \frac{400\ 000}{(1,05)^3} + \frac{M}{(1,05)^5}$$

$$M \approx 487\ 994$$

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
n+2	1 000 000	102 500	197 500	300 000
n+3	802 500	40 125	359 875	400 000
n+5	442 625	45 369	44 2625	487 994

Somme des intérêts = 187 994 €

4) L'entreprise doit choisir les emprunts indivis.

PROBLEME 2

I)

1) On produit 50 objets a et 50 objets c

Horaires disponibles :

$$A1 : 160 - 50 - 100 = 10$$

$$A2 : 500 - 450 - 200 = 50$$

$$A3 : 350 - 100 - 50 = 200$$

Nombre d'objets b que l'on peut produire :

Avec $\left\{ \frac{10}{1}; \frac{50}{3}; \frac{200}{7} \right\}$ on peut produire 10 objets b.

2) Si l'on produit 85 objets a et 25 objets b

→ Horaires disponibles

$$A1 : 160 - 85 - 25 = 55$$

$$A2 : 500 - 425 - 75 = 0$$

$$A3 : 350 - 170 - 175 = 5$$

Il n'a pas plus d'horaires disponibles en A2 donc on ne peut produire c.

3) Le système équivaut à résoudre $A X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 160 \\ 500 \\ 350 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$X = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$4) M1 = 50 \cdot 600 + 50 \cdot 200 = 40 \, 000$$

$$M2 = 85 \cdot 600 + 25 \cdot 400 = 61 \, 000$$

$$M3 = 50 \cdot 400 + 40 \cdot 400 + 30 \cdot 200 = 52 \, 000$$

II)

$$\begin{array}{lcl} 1) & 4x + 4y \leq 400 & \Leftrightarrow x + y \leq 100 \\ & 6x + 3y \leq 525 & \Leftrightarrow 2x + y \leq 175 \end{array}$$

2) Cf Graph

3) $W = 600x + 400y$

si $W = 50\ 000$

Δ a pour équation $3x + 2y = 250$

On remarque que cette droite tangente détermine la zone de production possible au point d'intersection des deux droites.

La production qui maximise le W est le point d'intersection $x = 75$
 $Y = 25$

La production à ce point donne aussi la marge maximale car toute augmentation de W éloignerait Δ de la zone des productions et il n'y aurait plus d'intersection

Problème n°1

Cas n°1

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
1	1 000 000,00	50 000,00	180 974,80	230 974,80
2	819 025,20	40 951,26	190 023,54	230 974,80
3	629 001,66	31 450,08	199 524,71	230 974,80
4	429 476,95	21 473,85	209 500,95	230 974,80
5	219 976,00	10 998,8	219 976,00	230 974,80
TOTAL		154 873,99		1 154 873,99

Cas n°2

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
1	1 000 000	50 000	200 000	250 000
2	800 000	40 000	200 000	240 000
3	600 000	30 000	200 000	230 000
4	400 000	20 000	200 000	220 000
5	200 000	10 000	200 000	210 000
TOTAL		150 000		1 150 000

Cas n°3

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
1	1 000 000	50 000	-50 000	0
2	1 050 000	52 500	247 500	300 000
3	802 500	40 125	359 875	400 000
4	442 625	22 131,25	-22 131,25	0
5	464 756,25	23 237,81	464 756,25	487994,06
TOTAL		187 994,06		1 187 994,06

Problème 2

