Comptalia.com

1ère Ecole en ligne des professions comptables

48h après l'examen sur www.comptalia.com

Spécialiste des préparations à l'Expertise Comptable et des formations en compta-gestion via Internet

Les corrigés des examens DPECF - DECF 2006

L'école en ligne qui en fait + pour votre réussite

MÉTHODES QUANTITATIVES

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 0,5

Documents autorisés :
Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante, et sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

Document remis au candidat :
Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

Barème indicatif :

Partie A	3 points
Partie B	5 points
Partie C	5 points
Partie D	7 points

Avertissement :
Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement dans votre copie.

Les quatre parties du problème sont indépendantes.

PARTIE A (3 points)

On a relevé sur dix semaines, numérotées de t = 1 à t = 10, la fréquence d'utilisation d'un nouveau type de matériel dans une chaîne de magasins franchisés. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,03	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,55	0,65	0,75

1. Représenter dans un repère orthogonal du plan le nuage de points.
   (On prendra pour unités graphiques 1 cm pour une semaine en abscisses et 10 cm pour 1 en ordonnées).

2. À la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de y en t ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. (Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près).

3. Si la tendance constatée se poursuit, quelle sera, à 1 % près, la fréquence d'utilisation de ce type de matériel la 13ème semaine ? la 15ème semaine ? Quelle remarque pouvez-vous faire ?

PARTIE B (5 points)

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{1 + 50e^{-0,5\,t}}$

et on désigne par C sa représentation graphique dans le repère du plan de la partie A.

1. Calculer $f'(t)$ et en déduire le sens de variation de f.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C de f ?

3. Tracer C dans le repère de la partie A.

4. On admet que C est une bonne approximation du nuage de points précédent.

   a. Déterminer une estimation de la fréquence d'utilisation de ce nouveau matériel la 13ème semaine et la 15ème semaine.

   b. Déterminer par le calcul à partir de quelle semaine la fréquence d'utilisation de nouveau matériel sera supérieure à 99 %.

PARTIE C (5 points)

Lors d'une étude sur la clientèle de cette chaîne de magasins on a constaté que 90 % des clients ayant fréquenté ces magasins une semaine donnée reviennent la semaine suivante auxquels s'ajoutent 800 nouveaux clients.

On désigne par (C_n) le nombre de clients fréquentant ces magasins la semaine n et on donne $C_0 = 5\,000$.

1. Calculer C_1 et C_2.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

3. On définit la suite (U_n) par $U_n = C_n - 8\,000$.

   a. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique.

   b. Exprimer U_n puis C_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de cette suite et indiquer quelle conséquence vous en déduisez pour le nombre de clients de cette chaîne.

PARTIE D (7 points)

Pour favoriser son développement cette chaîne de magasins émet un emprunt de type obligataire aux conditions suivantes :

- ► Nombre de titres émis : 5 000
- ► Durée : 10 ans
- ► Nominal de l'obligation : 500 €
- ► Prix de souscription : 495 €
- ► Remboursement au pair
- ► Taux nominal annuel : 5 %
- ► Amortissement au moyen d'annuités sensiblement constantes.

1. Calculer l'annuité théorique de remboursement.

2. Présenter les deux premières et les deux dernières lignes du tableau d'amortissement.
   On arrondira le nombre d'obligations amorties chaque année à l'entier le plus proche.

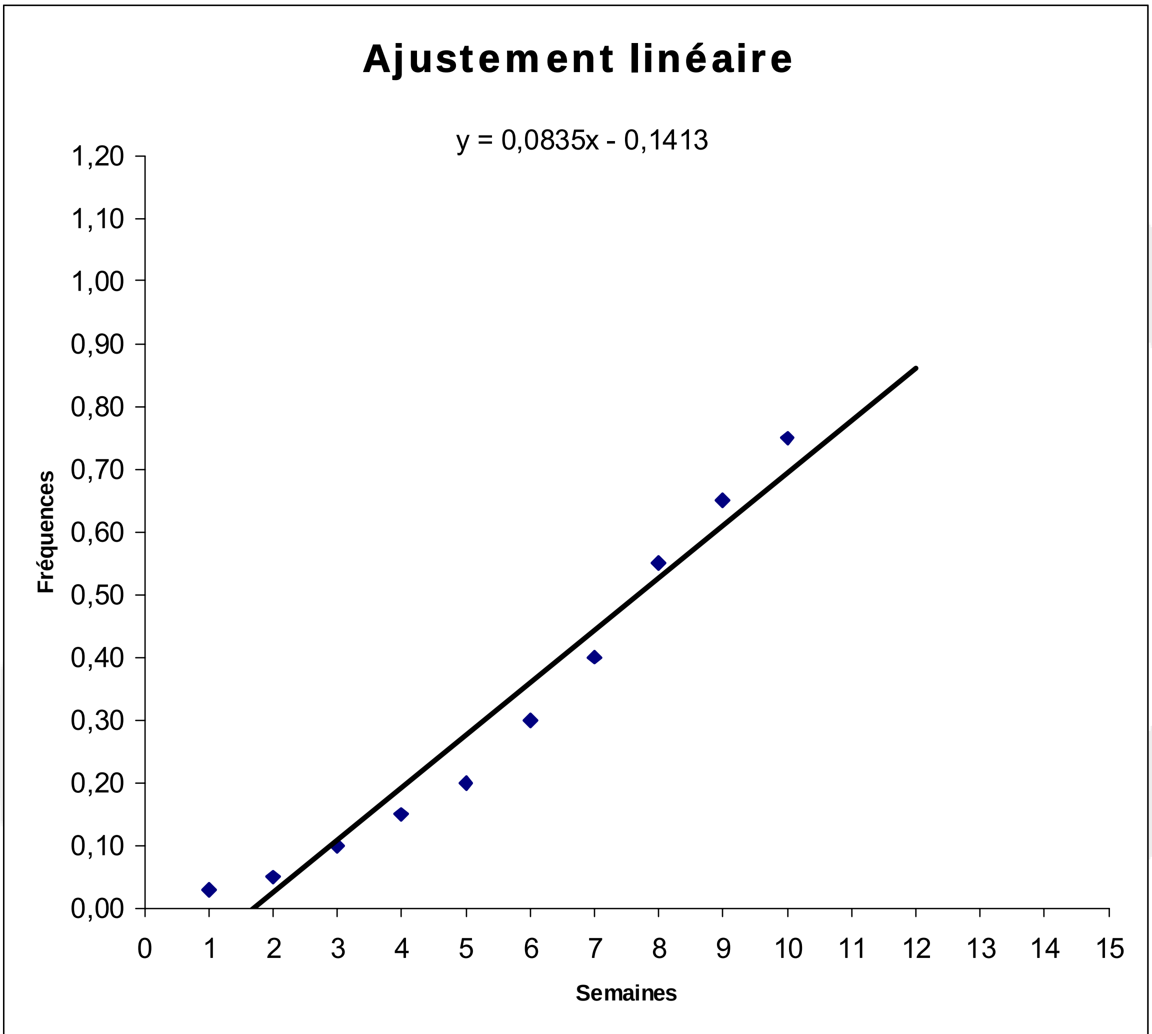
3. Calculer le taux de rendement de cet emprunt.

4. Calculer le taux de revient de cet emprunt pour la chaîne sachant que les frais d'émission s'élèvent à deux pour mille du nominal.

CORRIGE-TYPE

PARTIE A (3 points)

1. Représenter dans un repère orthogonal du plan le nuage de points.



2. À la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de y en t ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. (Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près).

Une calculatrice donne les résultats suivants :

=> y = 0,0835x – 0,1413

=> **Coefficient de corrélation = 0,9775**

Remarque
A titre pédagogique nous allons rappeler les formules à utiliser pour trouver l'équation de la droite d'ajustement et le coefficient de corrélation.

Application à l'exercice

x	y	x^2	x *y	y^2
1	0,03	1,00	0,03	0,00
2	0,05	4,00	0,10	0,00
3	0,10	9,00	0,30	0,01
4	0,15	16,00	0,60	0,02
5	0,20	25,00	1,00	0,04
6	0,30	36,00	1,80	0,09
7	0,40	49,00	2,80	0,16
8	0,55	64,00	4,40	0,30
9	0,65	81,00	5,85	0,42
10	0,75	100,00	7,50	0,56
55	**3,18**	**385,00**	**24,38**	**1,61**

$$a = \frac{\text{Cov}(xy)}{V(x)}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Sachant que :

N = Nombre d'observations (nombre de semaines, de mois, semestres, trimestres …..) = 10

$$\text{Moyenne de } x = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \frac{1}{10} * 55 = 5{,}50$$

$$\text{Moyenne de } y = \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} y_i = \frac{1}{10} * 3{,}18 = 0{,}318$$

Variance = Moyenne des carrés – Carré de la moyenne

$$\Rightarrow V(x) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2\right] - (\bar{x})^2 = \left(\frac{1}{10} * 385\right) - 5{,}50^2 = 8{,}25$$

$$\Rightarrow V(y) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2\right] - (\bar{y})^2 = \left(\frac{1}{10} * 1{,}61\right) - 0{,}318^2 = 0{,}0599$$

Remarque :
Compte tenu de sa définition, une variance ne peut pas être négative !

Covariance = Moyenne des produits – Produit des moyennes

$$\Rightarrow \text{Cov}(xy) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right] - (\bar{x}\,\bar{y}) = \left(\frac{1}{10} * 24{,}38\right) - (5{,}50 * 0{,}318) = 0{,}689$$

Remarque :
Compte tenu de sa définition, une covariance peut être négative !

$$\text{Coefficient de corrélation "r"} = \frac{\text{Cov (xy)}}{\sigma(x) * \sigma(y)} = \frac{0{,}689}{\sqrt{8{,}25} * \sqrt{0{,}0599}} = 0{,}9801$$

Ecart type de "x" $= \sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

Ecart type de "y" $= \sigma(y) = \sqrt{V(y)}$

Remarque :
Compte tenu de sa définition, le coefficient de corrélation est obligatoirement compris entre – 1 et 1 !

D'autre part, on ne trouve pas exactement les montants que ceux trouvés avec la calculatrice, à cause des arrondis !

Conclusion.

$$\Rightarrow a = \frac{\text{Cov (xy)}}{V(x)} = \frac{0{,}689}{8{,}25} = \mathbf{0{,}0835}$$

$$\Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 0{,}318 - (0{,}0835 * 5{,}50) = \mathbf{0{,}1413}$$

=> y = 0,0835 x – 0,1413

=> Coefficient de corrélation "r" = 0,9801

3. Si la tendance constatée se poursuit, quelle sera, à 1 % près, la fréquence d'utilisation de ce type de matériel la 13ème semaine ? la 15ème semaine ? Quelle remarque pouvez-vous faire ?

La fréquence d'utilisation la 13ème semaine devrait être de $\Rightarrow$ (0,0835 * 13) – 0,1413 = **0,9442**

La fréquence d'utilisation la 15ème semaine devrait être de $\Rightarrow$ (0,0835 * 15) – 0,1413 = **1,1112**

Remarque :
On sait qu'on doit avoir 0 < f < 1 or à la 15ème semaine on a f > 1, donc la méthode par ajustement linéaire ne nous permet pas de calculer correctement la fréquence d'utilisation au-delà d'une certaine période.

PARTIE B (5 points)

On considère la fonction définie sur [0;+∞[par f(t) = $\frac{1}{1+50e^{-0,5t}}$

et on désigne par C sa représentation graphique dans le repère du plan de la partie A.

1. Calculer f '(t) et en déduire le sens de variation de f.

Soit les rappels suivants :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{v} = -\frac{v'}{v^2}$$

$$uv' = u'v + uv'$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

Par conséquent, f '(t) = $\frac{-(1+50e^{-0,5t})'}{(1+50e^{-0,5t})^2} = -\frac{50*-0.5e^{-0,5t}}{(1+50e^{-0,5t})^2} = \frac{25e^{-0,5t}}{(1+50e^{-0,5t})^2}$

Sur [0;+∞[, $e^X > 0 \Rightarrow$ f '(t) > 0 $\Rightarrow$ f est croissante sur cet intervalle.

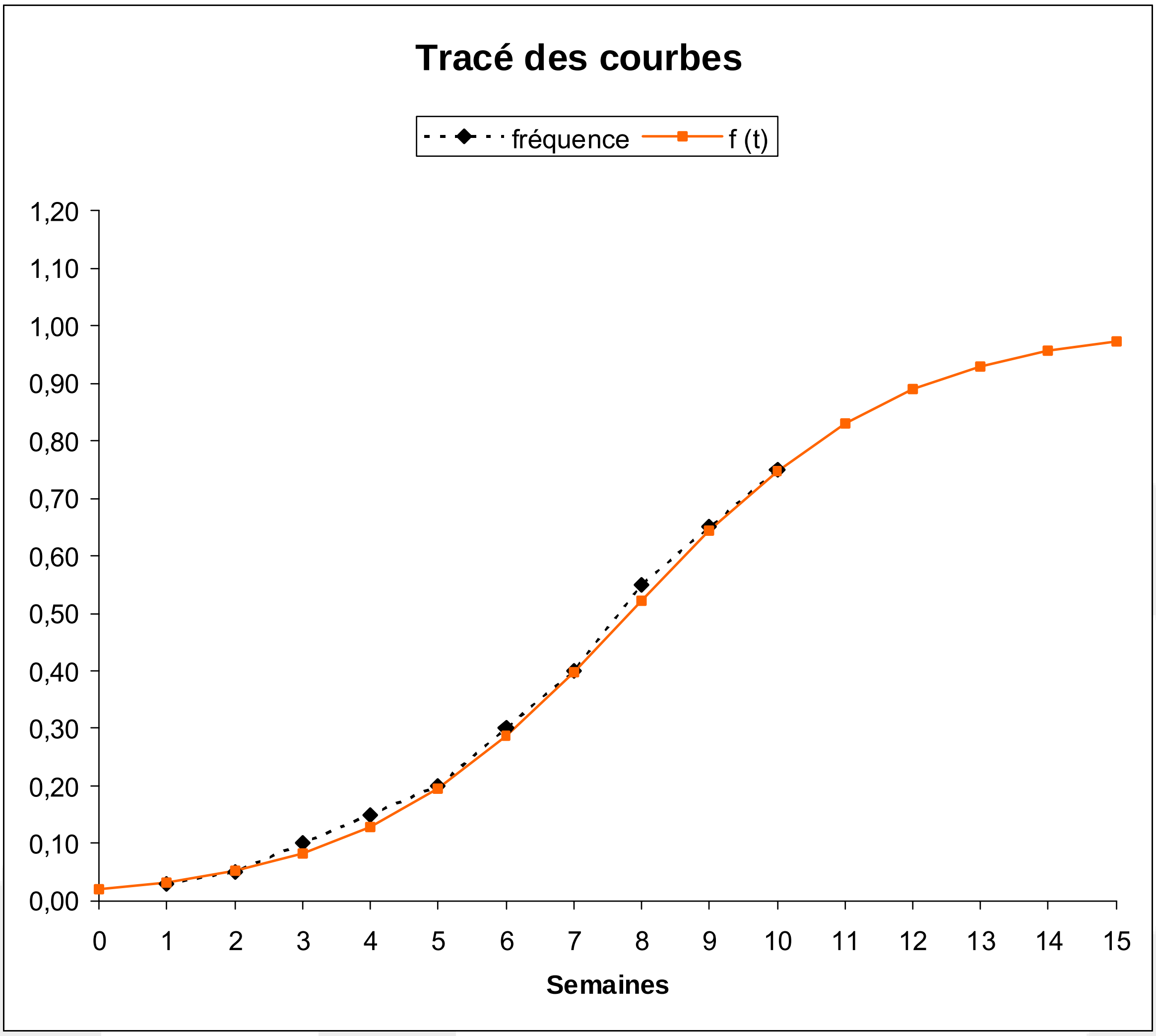
t	0	$+\infty$
f '(t)	+	
f (t)	1/51 ↗	1

2. Déterminer la limite de f en + ∞. Que peut-on en déduire pour la courbe C de f.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \frac{1}{(1+0)} = 1$$

La courbe C admet comme asymptote la droite y=1.

3. Tracer C dans le repère de la partie A.



4. On admet que C est une bonne approximation du nuage de points précédent.

a. Déterminer une estimation de la fréquence d'utilisation de ce nouveau matériel la 13ème semaine et la 15ème semaine.

$$f(13) = \frac{1}{1+50e^{-0,5*13}} = 0,9301$$

$$f(15) = \frac{1}{1+50e^{-0,5*15}} = 0,9731$$

b. Déterminer par le calcul à partir de quelle semaine la fréquence d'utilisation de nouveau matériel sera supérieure à 99 %.

$$\frac{1}{1+50e^{-0,5t}} = 0,99 \Leftrightarrow (1+50e^{-0,5t}) * 0,99 = 1 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{1-0,99}{0,99*50}$$

or $y = e^X \Leftrightarrow x = \ln y$

$$-0,5t = \ln\frac{1-0,99}{0,99*50} \Leftrightarrow t = -2\ln\frac{1-0,99}{0,99*50} \approx 17,014$$

Par conséquent, il faut 18 semaines pour obtenir une fréquence d'utilisation supérieure à 99 %.

PARTIE C (5 points)

Lors d'une étude sur la clientèle de cette chaîne de magasins on a constaté que 90 % des clients ayant fréquenté ces magasins une semaine donnée reviennent la semaine suivante auxquels s'ajoutent 800 nouveaux clients.

On désigne par (C_n) le nombre de clients fréquentant ces magasins la semaine n et on donne $C_0 = 5\,000$.

1. Calculer C_1 et C_2.

$C_1 = C_0 * 0,9 + 800 = 5\,000 * 0,9 + 800 = 5\,300$
$C_2 = C_1 * 0,9 + 800 = 5\,300 * 0,9 + 800 = 5\,570$

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
$C_1 = 0,9 * C_0 + 800$
$C_2 = 0,9 * C_1 + 800$
$C_3 = 0,9 * C_2 + 800$
….
….
$C_{n+1} = 0,9 * C_n + 800$

3. On définit la suite (U_n) par $U_n = C_n - 8\,000$.

a. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique.

Il faut démontrer $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \Leftrightarrow u_{n+1} = qu_n$ q étant la raison

$U_n = C_n - 8\,000$

$U_{n+1} = C_{n+1} - 8\,000 = 0,9 * C_n + 800 - 8\,000 = 0,9 * C_n - 7\,200 = 0,9 * (C_n - \frac{7\,200}{0,9})$

$= 0,9 * (C_n - 8\,000) = 0,9 * U_n$

$U_{n+1} = 0,9 * U_n \Rightarrow q = 0,9$

U_n est une suite géométrique de raison 0,9

b. Exprimer U_n puis C_n en fonction de n.

Comme U_n est une suite géométrique $\Rightarrow U_n = U_0 * q^n$

$U_0 = C_0 - 8\,000$
$U_0 = 5\,000 - 8\,000 = -3\,000$
$U_n = U_0 * q^n = -3\,000 * 0,9^n$
$U_n = C_n - 8\,000 \Rightarrow C_n = U_n + 8\,000 = -3\,000 * 0,9^n + 8\,000$

c. Déterminer la limite de cette suite et indiquer quelle conséquence vous en déduisez pour le nombre de clients de cette chaîne.

Si n tend vers l'infini, $C_n = 8\,000$.
Le nombre de clients de cette chaîne de magasins ne pourra dépasser 8000 clients.

PARTIE D

1. Calculer l'annuité théorique de remboursement.

Dans cet exercice, le remboursement de l'obligation est "au pair".

Cela signifie que le prix de remboursement (PR) est égal à la valeur nominale (VN)

- Formules nécessaires

VN = Valeur nominale = 500

N = Nombre total d'obligations émises = 5 000

n = Durée de l'emprunt (exprimée en années) = 10

i = Taux d'intérêt nominal (ou facial) annuel = 5%

$$\text{Annuité constante} = (N)\ (VN) \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}\right]$$

Il vient :

$$=> \text{Annuité constante} = 5\ 000 * 500 \left[\frac{0{,}05}{1 - (1{,}05)^{-10}}\right]$$

=> **Annuité constante = 323 761,44 €**

2. Présenter les deux premières et les deux dernières lignes du tableau d'amortissement. On arrondira le nombre d'obligations amorties chaque année à l'entier le plus proche.

Date d'échéance	capital restant dû (en PR) 1	Intérêts (ou coupons) 2 = 1 * 5%	Amortissement théorique 3 = Annuité – 2	Obligations réellement amorties 4 = 3 / PR Arrondies à l'entier le plus proche	Amortissement réel 5 = 4 * PR	Obligations vivantes
Fin 1	2 500 000	125 000	198 761,44	398	49 000	4 602 **(a)**
Fin 2	2 301 000	115 050	208 711,44	417	208 500	4 185
Fin 8 **(b)**						1 204
Fin 9	602 000	30 100	293 661,44	587	293 500	617
Fin 10	308 500	15 425	308 336,44	617	308 500	0

(a) => Nombre d'obligations vivantes avant l'échéance
– <u>Nombre d'obligations réellement amorties lors de cette échéance</u>
Nombre d'obligations vivantes après l'échéance

=> 5 000 – 398 = 4 602

(b) => Il existe plusieurs manières de procéder pour présenter les deux dernières lignes du tableau d'amortissement !

=> Nous allons utiliser la formule qui permet de calculer le nombre d'obligations théoriques vivantes (non arrondi) après "8" échéances.

$$\Rightarrow UV = (N)\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$\Rightarrow UV = 5\,000\left[\frac{(1{,}05)^{10} - (1{,}05)^8}{(1{,}05)^{10} - 1}\right]$$

=> UV = 1 204,01

=> Nombre d'obligations vivantes après la 8ème échéance = 1 204

=> Ensuite le tableau se complète facilement !

Remarque.

On aurait pu aussi utiliser la formule qui donne directement le nombre théorique d'obligations (non arrondi) au pième tirage => $U_p = (U_1)(1+i)^{p-1}$

Sachant que U_1 correspond au nombre d'obligations amorties non arrondies au 1er tirage :
U_1 = 198 761,44/500 = 397,52

Si on applique ce principe, il vient :
=> Nombre d'obligations amorties lors du 9ème tirage = 397,52 * $(1{,}05)^8$ = 587,32 = 587

=> Nombre d'obligations amorties lors du 10ème tirage = 397,52 * $(1{,}05)^9$ = 616,68 = 617

Ensuite il suffit de "remonter" en arrière pour retrouver tous les montants.

Toutefois, à cause des arrondis on peut trouver un montant légèrement différent de celui présenté dans le tableau.

Nous aurions pu aussi utiliser la formule qui donne directement le montant du pième amortissement théorique.
=> $M_p = (M_1)(1+i)^{p-1}$

Sachant que M_1 correspond au 1er amortissement non arrondi au 1er tirage :
M_1 = 198 761,44 => cf le tableau ci-dessus !

Si on applique ce principe, il vient :
=> Amortissement non arrondi lors du 9ème tirage = 198 761,44 * $(1{,}05)^8$ = 293 661,17

=> Amortissement non arrondi lors du 10ème tirage = 198 761,44 * $(1{,}05)^9$ = 308 344,23

Toutefois, à cause des arrondis on peut trouver un montant légèrement différent de celui présenté dans le tableau.

3. Calculer le taux de rendement de cet emprunt

Remarque préalable.
L'énoncé ne précise pas s'il s'agit de calculer le taux de rendement moyen ou s'il s'agit de calculer le taux de rendement effectif de l'emprunt obligataire !

Par hypothèse nous supposerons qu'il s'agissait du taux de rendement moyen. En effet le problème du taux de rendement effectif c'est qu'il est différent en fonction de la date du remboursement potentiel à l'obligataire. On pourrait donc calculer dans cet exercice 10 taux de rendement effectifs (un par date de remboursement potentiel !).

Principe

Il s'agit de trouver "t" dans l'équation suivante => $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{P.E}{VN} * \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Sachant que :
- PE = Prix d'émission ;
- i = Taux nominal;
- n = Durée de vie de l'emprunt à l'origine

$$=> \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{495}{500} * \frac{1-(1{,}05)^{-10}}{0{,}05}$$

$$=> \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 7{,}64$$

Pour résoudre cette équation on peut utiliser les tables financières (si elles sont fournies avec l'énoncé) ou passer par l'interpolation linéaire ! On choisit donc deux taux "pris au hasard" pour encadrer 7,64.

En choisissant 5% et 6%, il vient :

	Taux
$\frac{1-(1{,}05)^{-10}}{0{,}05} = 7{,}72$	**5%**
7,64	=> t (ce que l'on cherche)
$\frac{1-(1{,}06)^{-10}}{0{,}06} = 7{,}36$	**6%**

On pose => $\frac{t-0{,}05}{0{,}06-0{,}05} = \frac{7{,}64-7{,}72}{7{,}36-7{,}72}$

Il vient => $\frac{t-0{,}05}{0{,}01} = \frac{-0{,}08}{-0{,}36}$

$$=> \frac{t-0{,}05}{0{,}01} = 0{,}222222$$

=> $(t - 0{,}05) = 0{,}01 * 0{,}222222$ => $t = (0{,}01 * 0{,}222222) + 0{,}05$

=> $t = 0{,}0522222$

=> Taux de rendement moyen = 5,22%

4. Calculer le taux de revient de cet emprunt pour la chaîne sachant que les frais d'émission s'élèvent à deux pour mille du nominal.

Principe

Il s'agit de trouver "t" dans l'équation suivante => $\dfrac{1 - (1 + t)^{-n}}{t} = \dfrac{P.E - F}{VN} * \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

Sachant que :

PE = Prix d'émission = 495
VN = Valeur nominale = 500
F = Frais d'émission en € par obligation = 2‰ = 500 * 0,002 = 1
i = Taux nominal;
n = Durée de vie de l'emprunt à l'origine

Il vient :

$$=> \frac{1 - (1 + t)^{-n}}{t} = \frac{495 - 1}{500} * \frac{1 - (1,05)^{-10}}{0,05}$$

$$=> \frac{1 - (1 + t)^{-n}}{t} = 7,63$$

Pour résoudre cette équation on peut utiliser les tables financières (si elles sont fournies avec l'énoncé) ou passer par l'interpolation linéaire ! On choisit donc deux taux "pris au hasard" pour encadrer 7,63.

En choisissant 5% et 6%, il vient :

	Taux
$\dfrac{1 - (1,05)^{-10}}{0,05} = 7,72$	**5%**
7,63	=> t (ce que l'on cherche)
$\dfrac{1 - (1,06)^{-10}}{0,06} = 7,36$	**6%**

On pose => $\dfrac{t - 0,05}{0,06 - 0,05} = \dfrac{7,63 - 7,72}{7,36 - 7,72}$

Il vient => $\dfrac{t - 0,05}{0,01} = \dfrac{- 0,09}{- 0,36}$

$$=> \frac{t - 0,05}{0,01} = 0,25$$

=> (t – 0,05) = 0,01 * 0,25 => t = (0,01 * 0,25) + 0,05

=> t = 0,0525

=> Taux de revient = 5,25%