Comptalia.com

1ère Ecole en ligne des professions comptables

Les corrigés des examens
DPECF 2007

L'école en ligne qui en fait + pour votre réussite

SESSION 2007

MÉTHODES QUANTITATIVES

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures Coefficient : 0,5

Documents autorisés :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante, et sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

Document remis au candidat :

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 dont **deux annexes à rendre avec la copie notées Annexe I et Annexe II.**

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

Barème indicatif :

Exercice 1

Partie A	2,5 points
Partie B	3,5 points

Exercice 2

Partie A	7 points
Partie B	7 points

AVERTISSEMENT

Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement dans votre copie.

EXERCICE 1 :

A) Un organisme de crédit propose des prêts au taux annuel de 4,2 % remboursables en 24 mensualités constantes (la 1ère mensualité étant réglée un mois après la date de mise à disposition du capital).

1) Calculer (à 10^{-4} près en %) le taux mensuel équivalent au taux annuel de 4,2 %.
2) Calculer la mensualité de remboursement pour un capital emprunté de 9 000 €.

B) Dans l'exemple proposé il est précisé : « pour un financement de 9 000 € vous remboursez une 1ère mensualité (réglée un mois après la date de mise à disposition du capital) de 495,82 €, frais de dossier de 105 € inclus, puis 23 mensualités de 390,82 € TEG fixe de 5,14 % ».

1) Donner l'équation d'équivalence entre le capital emprunté et les sommes remboursées.
2) Montrer que cette équation est vérifiée pour un taux mensuel t égal à 0,004285.
3) Calculer le taux annuel équivalent au taux t, puis le taux annuel proportionnel au taux t. Que pouvez-vous en conclure ?

EXERCICE 2 : (Les parties A et B sont indépendantes)

PARTIE A

Une entreprise envisage de commercialiser un nouveau produit et, à cet effet pour fixer le prix d'une unité, a fait procéder à une étude qui a permis de définir pour chaque quantité x commandée, le prix y que les clients sont disposés à payer pour une unité.

x : quantité commandée en milliers	6	5	4	3	2	1
y : prix d'une unité en €	0,85	1,15	1,50	1,95	2,60	3,65

Ainsi pour qu'un client envisage une commande de 5 000 unités, le prix d'une unité doit être de 1,15 €.
Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

1) a) Représenter cette série statistique par un nuage de points (on utilisera l'annexe I).
   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
      Pourrait-on envisager un ajustement affine ?

2) On pose $t = \ln x$.
   a) Compléter le tableau de l'annexe II. (Les valeurs de t seront arrondies à 0,01 près.)
   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (t, y).
   c) Donner l'équation de la droite de régression de y en t (les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).
   d) En déduire l'expression de y en fonction de x.
   e) Estimer le prix de vente par unité pour un client qui envisage de commander 8 000 unités.

PARTIE B

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\,(-1{,}56 \ln x + 3{,}66)$ sur l'intervalle $I = [1;10]$.

1) a) Calculer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variations de f sur I.

b) Compléter le tableau de l'annexe II (on arrondira les valeurs de $f(x)$ à 10^{-2} près).

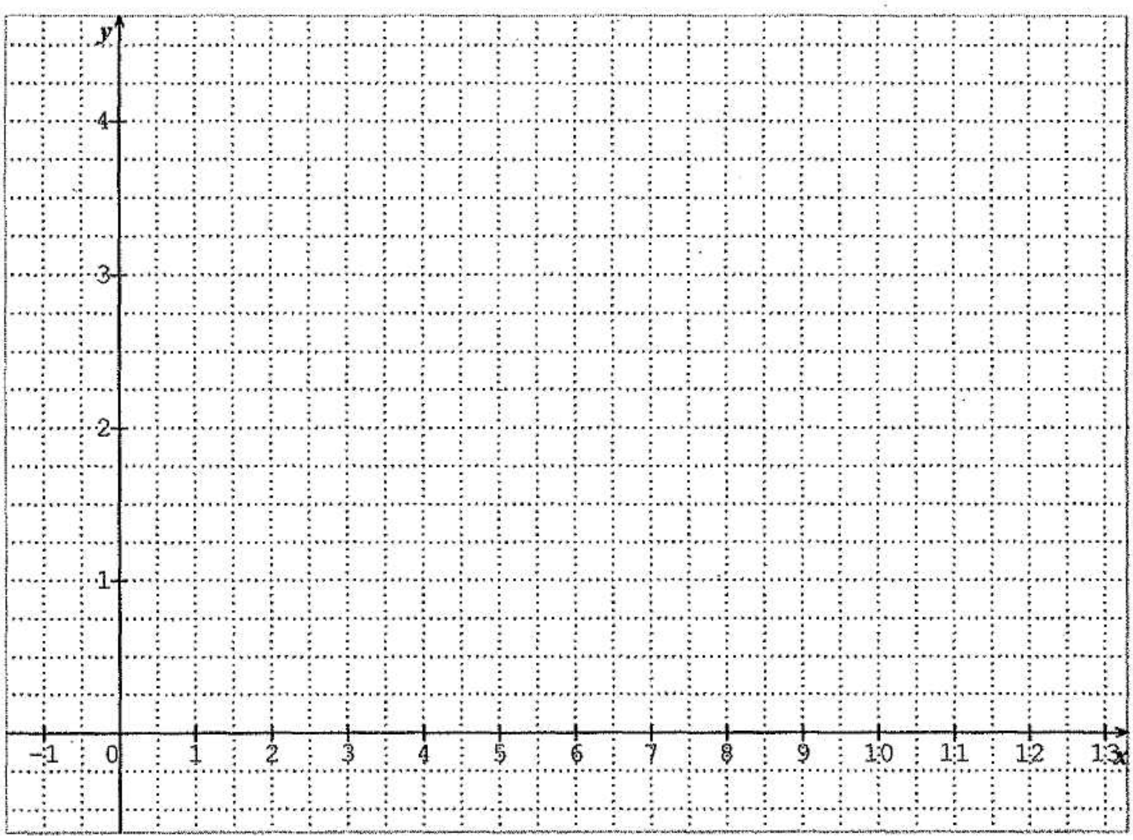
c) Tracer la courbe représentative de f dans le repère donné en annexe II.

2) Interprétation économique : on suppose que la relation qui lie le prix de vente y d'une unité au nombre de milliers d'unités commandées x est : $y = -1{,}56 \ln x + 3{,}66$.

a) Montrez que la recette $R(x)$ obtenue pour un achat de x objets sera donnée par la relation $R(x) = f(x)$.

b) En déduire la quantité d'objets commandés (arrondie à 10 près) qui donnera la recette maximale.

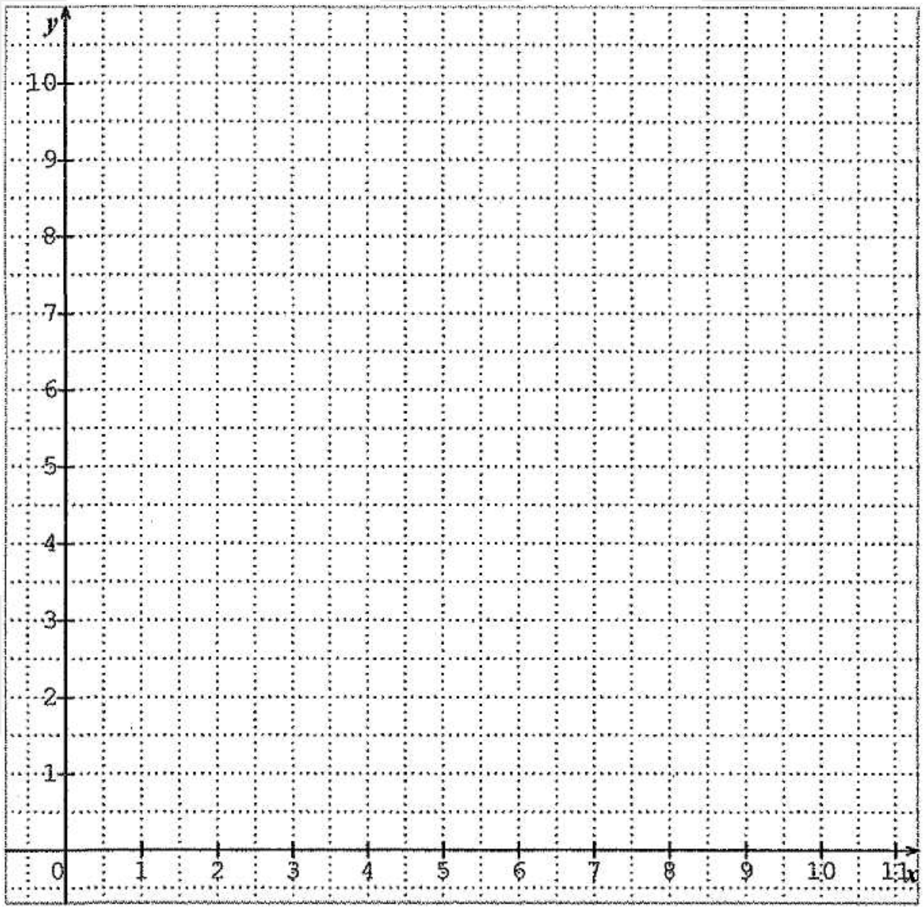
ANNEXE I



ANNEXE II

x	6	5	4	3	2	1
$t = \ln x$	1,79					
y	0,85					

x	1	2	3,8	5	6	8	10
$f(x)$							



PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1

PARTIE A

1. Taux mensuel équivalent

- Rappel sur le principe de calcul d'un taux équivalent :
i = Le taux d'actualisation annuel donné par l'énoncé

i' = Le taux d'équivalence recherché

On pose l'équation => $(1 + i') = (1 + i)^k$

Où k = Le rapport entre la période donnée et la période équivalente recherchée

- **Application à la question**

Taux annuel i = 4,2%

La période = Le mois, et il y a 12 mois dans une année c'est-à-dire k=1/12.

Il découle de l'analyse qui précède que :

$(1 + i') = (1 + 0,042)^{(1/12)}$

$(1 + i') = 1,00343438$

$i' = 1,00343438 - 1$

$i' = 0,00343438$

i' = 0,3434 %

2. Calculer la mensualité de remboursement pour un capital emprunté à 9 000 euros

Principe :
Il faut appliquer la formule qui permet de déterminer la valeur actuelle V(a) d'une suite de mensualités constantes.

Rappel : $V(a) = a \times \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$ (1)

Avec : la valeur actuelle V(a) = 9 000

La mensualité constante = a que l'on cherche

Taux mensuel équivalent, i = 0,343438%

Le nombre de mensualités constantes versées = n = 24

Il découle de (1) que

$$: V(a) \times \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-24}}\right] = a$$

$$=> \text{Soit} => 9\ 000 \times \left[\frac{0,00343438}{1-(1,00343438)^{-24}}\right] = a$$

On obtient a = 391,31021

Conclusion :
La mensualité de remboursement pour capital emprunté de 9 000 euros au taux annuel de 4,2% est de 391,31 euros

PARTIE B

1) Donner l'équation d'équivalence entre le capital emprunté et les sommes remboursées

Rappel :
On veut calculer l'équation d'équivalence connaissant le capital prêté, le montant des annuités, le montant des frais de dossier.

Pour cela on applique la formule permettant de trouver la valeur actuelle d'une suite de mensualités constantes.

$$\text{On a : } V(a) = Fd + a \times \left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right] \qquad (2)$$

Avec :

Fd = frais de dossier = 105 euros

Avec : la valeur actuelle V(a) = 9 000

La mensualité constante = a = 390,82

Le Taux mensuel est t

Le nombre de mensualités constantes versées = n = 24

2) Montrer que cette équation est vérifiée pour un taux mensuel t =0,004285

- **Application à la question** :

En remplaçant par t = 0,004285 dans l'équation (2) on obtient

$$V(a) = 105 + 390,82 \times \left[\frac{1-(1+0,004285)^{-24}}{0,004285}\right] = 9\ 000,41136$$

3) Calculer le taux annuel équivalent au taux t

A la question a1 de l'exercice 1 on a vu que **:**

i = le taux d'actualisation mensuel donné par l'énoncé

i' = le taux d'équivalence annuel recherché

Sont reliés par la relation :

$$(1 + i') = (1 + i)^k$$

$$\text{soit } i' = (1 + i)^k - 1$$

Avec
K= le rapport entre la période donnée et la période équivalente recherché : k = 12

Il vient :

$$i' = (1 + 0{,}004285)^{12} - 1 = 0{,}05264932$$

Le taux annuel équivalent au taux t est de 5,26%

- Calculer le taux annuel proportionnel t

On utilise la formule suivante : $i = \frac{t}{k}$

Soit t = ik = 0,004285 * 12 = 0,05142

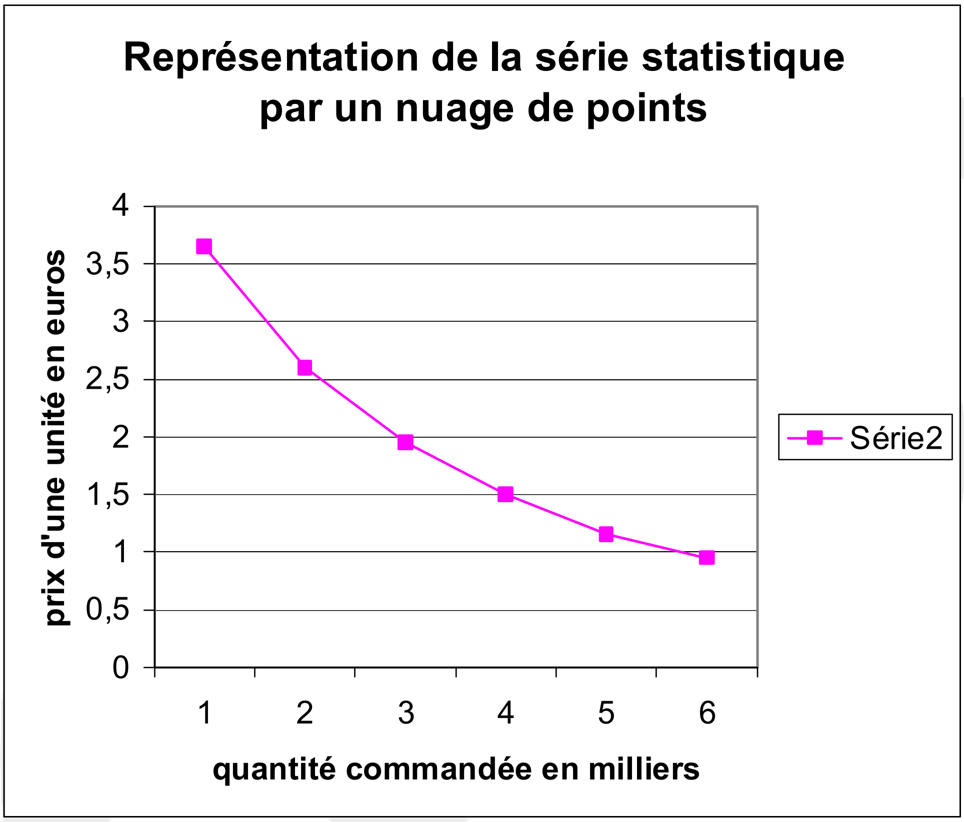
Le taux annuel proportionnel au taux mensuel donné est égal à 5,14%

<u>**Commentaires**</u> :
A intérêt composé, le taux proportionnel n'est pas identique au taux équivalent.

EXERCICE 2

PARTIE A

a) Représentation graphique



b) Calcul du coefficient de corrélation linéaire

- **Rappel**

Formule du coefficient de corrélation linéaire => $r = \frac{Cov\left(xy\right)}{\sigma\left(x\right) \times \sigma\left(y\right)}$

<u>Procédure</u> :
Il est donc nécessaire au préalable de calculer les moyennes, les écarts type de x et y ainsi que la covariance de x et y

- **Tableau préparatif des calculs**

x_i Quantités par milliers	y_i Prix d'une unité	x_i^2	$x_i\, y_i$	y_i^2
1	3,65	1	3,65	13,32
2	2,60	4	5,20	6,76
3	1,95	9	5,85	3,80
4	1,50	16	6,00	2,25
5	1,15	25	5,75	1,32
6	0,85	36	5,10	0,72
$\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ **= 21**	$\sum_{i=1}^{i=n} y_i$ **= 11,70**	$\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2$ **= 91**	$\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$ **= 31,55**	$\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2$ **= 28,18**

N = Nombre d'observations (nombre de mois, semestres, trimestres, années…) = 16

Attention.
Ne pas confondre N (6) avec la somme des N (21).

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 1/6 * 21 = \mathbf{3{,}50}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} y_i = 1/6 * 11{,}70 = \mathbf{1{,}95}$$

$$V(x) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2\right] - (\bar{x})^2 = [\ 1/6 * 91] - (3{,}5)^2 = \mathbf{2{,}92}$$

$$Cov\ (xy) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right] - (\bar{x}\ \bar{y}) = [1/6 * 31{,}55] - (3{,}5 * 1{,}95) = \mathbf{-\ 1{,}57}$$

Remarque.
$\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$ est différent de : $\sum_{i=1}^{i=n} x_i * \sum_{i=1}^{i=n} y_i$ => 31,55 n'est pas égal à : 21 * 11,70 = 245,70

$$\mathbf{a} = \frac{Cov\ (xy)}{V(x)} = -\ 1{,}57/2{,}92 = \mathbf{-\ 0{,}54}$$

$$\mathbf{b} = \bar{y} - a\,\bar{x} = 1{,}95 - (-\ 0{,}54 * 3{,}5) = \mathbf{3{,}84}$$

Conséquence :
=> **y = - 0,54x + 3,84**

Remarque :
Il peut apparaître quelquefois de légères différences dans les montants selon que les calculs successifs ont été effectués à partir de valeurs arrondies à chaque étape ou en cascade (on garde en mémoire tous les chiffres après la virgule => Ce que font les calculatrices ou Excel) !

3ème question : Calculer le coefficient de corrélation

$$V(y) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2\right] - (\bar{y})^2 = [\ 1/6 * 28{,}18] - (1{,}95)^2 = \mathbf{0{,}89}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2{,}92} = 1{,}71$$

$$\sigma(y) = \sqrt{V(y)} = \sqrt{0{,}89} = 0{,}94$$

$$r = \frac{Cov\ (xy)}{\sigma(x) * \sigma(y)} \Rightarrow r = \frac{-\ 1{,}57}{1{,}71 * 0{,}94}$$

=> **r = - 0,98**

Remarque :
On considère habituellement qu'un ajustement est acceptable lorsque le coefficient de corrélation de la série est proche de +/- 0,85.

Conséquence :
Le coefficient de corrélation linéaire « r » doit être compris entre - 1 et 1.

Comme le « r » trouvé (- 0,98) est très proche de - 1, on en déduit qu'il existe linéairement une forte corrélation entre les deux variables.

C'est pourquoi un ajustement linéaire est acceptable.

2) On pose t = lnx

a) Compléter le tableau de l'annexe II.

x	6	5	4	3	2	1
t = ln x	1,79	1,61	1,39	1,10	0,69	0
y	0,85	1,15	1,50	1,95	2,60	3,65

b) Calcul du coefficient de corrélation linéaire de la série (t, y)

- Tableau préparatif des calculs

x_i Quantités par milliers	$\ln x_i$ ou t_i	y_i Prix d'une unité	$\ln x_i^2$ ou t_i^2	$\ln x_i\, y_i$ ou $t_i\, y_i$	y_i^2
1	0,00	3,65	0,00	0,00	13,32
2	0,69	2,60	0,48	1,80	6,76
3	1,10	1,95	1,21	2,14	3,80
4	1,39	1,50	1,92	2,08	2,25
5	1,61	1,15	2,59	1,85	1,32
6	1,79	0,85	3,21	1,52	0,72
$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \mathbf{21}$	$\sum_{i=1}^{i=n} \ln x_i = \mathbf{6{,}58}$	$\sum_{i=1}^{i=n} y_i = \mathbf{11{,}70}$	$\sum_{i=1}^{i=n} \ln x_i^2 = \mathbf{9{,}41}$	$\sum_{i=1}^{i=n} \ln x_i y_i = \mathbf{9{,}40}$	$\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 = \mathbf{28{,}18}$

N = Nombre d'observations = 6 (et pas 21)

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} t_i = 1/6 * 6{,}58 = \mathbf{1{,}10}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 1/6 * 11{,}70 = \mathbf{1{,}95}$$

$$V(t) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} t_i^2\right] - (\bar{t})^2 = [\ 1/6 * 9{,}41] - (1{,}10)^2 = \mathbf{0{,}36}$$

$$Cov\ (ty) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} t_i y_i\right] - (\bar{t}\,\bar{Y}) = [1/6 * 9{,}40] - (1{,}10 * 1{,}95) = \mathbf{-\ 0{,}58}$$

Calcul du coefficient de corrélation

$$r = \frac{Cov\ (ty)}{\sigma(t) * \sigma(y)}$$

$$V(y) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2\right] - (\bar{y})^2 = [\ 1/6 * 28{,}18] - (1{,}95)^2 = 0{,}89$$

$$\sigma(t) = \sqrt{V(t)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}60$$

$$\sigma(y) = \sqrt{V(y)} = \sqrt{0{,}89} = 0{,}94$$

$$r = \frac{Cov\ (ty)}{\sigma(t) * \sigma(y)} \Rightarrow r = \frac{-\ 0{,}58}{0{,}94 * 0{,}60} \Rightarrow \mathbf{r = -\ 1{,}03}$$

<u>**Conséquence**</u> **:**
Le coefficient de corrélation linéaire "r" doit être compris entre - 1 et 1. Le « r » trouvé (- 1,03) est > - 1.

Ceci qui est théoriquement impossible mais si nous n'avions pas tenu compte des arrondis à chaque étape, nous aurions trouvé "r" = - 0,999927912.

c) Donner l'équation de la droite de régression de y en t

$$\mathbf{a} = \frac{Cov\ (ty)}{V(t)} = -\ 0{,}58/0{,}36 = \mathbf{-\ 1{,}61}$$

$$\mathbf{b} = \bar{y} - a\bar{t} = 1{,}95 - (-\ 1{,}61 * 1{,}10) = \mathbf{3{,}72}$$

Il vient :

=> **y = - 1,61t + 3,72**

d) En déduire l'expression de y en fonction de x.

On rappelle que t = lnx

Il vient :

=> **y = - 1,61 lnx + 3,72**

e) Estimer le prix de vente par unité pour un client qui envisage de commander 8 000 unités

Pour 8 000 unités de commande, x = 8

Il vient :

=> y = - 1,61 ln8 + 3,72

=> y = 0,37

PARTIE B

f(x) = x * (- 1,56 lnx + 3,66)

a1) Calcul de la dérivée

f(x) est de la forme U * V

=> f'(x) = U'V + UV'

Avec :

U = x => U' = 1

V = - 1,56 lnx + 3,66

Rappel.

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

La dérivée d'une constante est nulle par définition.

=> V' = (- 1,56 lnx)' + (3,66)'

La dérivée de ax = a

La dérivée de lnx = $\frac{1}{x}$

Donc => V' = (- 1,56 * $\frac{1}{x}$) + 0

=> V' = $\frac{-1,56}{x}$

Conséquence.

=> f'(x) = U'V + UV'

=> f'(x)= [1 * (- 1,56 lnx + 3,66)] + [x * $\frac{-1,56}{x}$]

=> f'(x) = - 1,56 lnx + 3,66 – 1,56

=> f'(x) = - 1,56 lnx + 2,10

a2) Sens de variation sur l'intervalle [1;10]

On annule la dérivée => - 1,56 lnx + 2,10 = 0

=> - 1,56 lnx = - 2,10

=> lnx = $\frac{2,10}{1,56}$ = 1,346

=> $e^{\ln x} = e^{1,346}$ = 3,84

Cette dérivée s'annule pour x = 3,84

Remarque.
Ce point constitue ce que l'on appelle un extremum (minimum ou maximum selon le cas).

Limite de f(x) quand x tend vers 1 = 3,66

Limite de f(x) quand x tend vers 10 = 0,68

Valeur de f(x) quand x = 3,84 = 5,99

Conséquence
Sur l'intervalle [1; 3,84[=> f(x) croît.

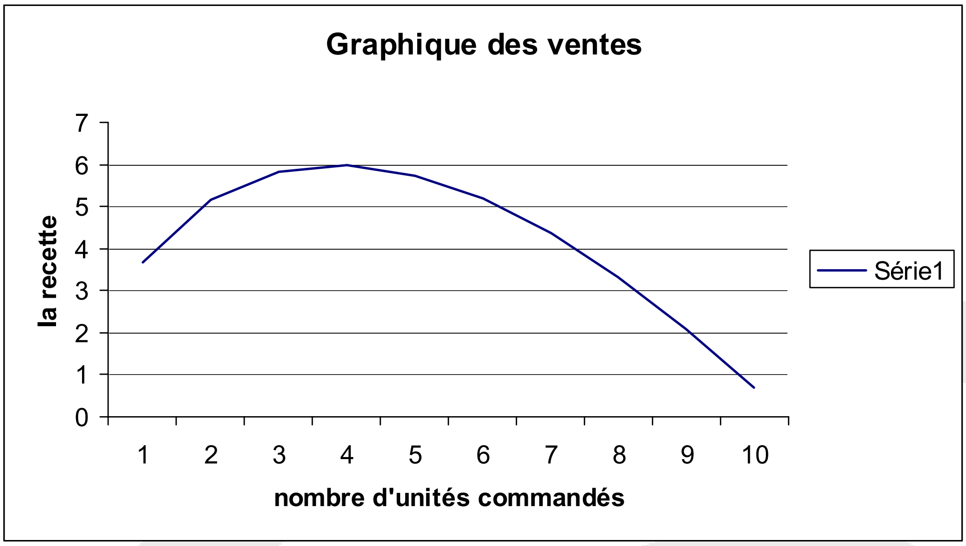
Sur l'intervalle]3,84; 10] => f(x) décroît.

Donc, 3,84 représente l'optimum de la fonction.

b) Compléter le tableau de l'annexe II

x	1	2	3,8	5	6	8	10
$f(x)$	3,66	5,15	5,99	5,98	5,18	3,32	0,68

c) Tracer la courbe représentative de *f* dans le repère donné en <u>annexe II</u>.



2a) Montrez que la recette R(x) obtenue pour un achat de x objets sera donnée par la relation R(x) = f(x).

La recette est égale au nombre d'unité multiplié par le prix d'une unité soit :

$$R(x) = x * (- 1,56 \ln x + 3,66) = f(x)$$

b) En déduire la quantité d'objets commandés (arrondie à 10 près) qui donnera la recette maximale.

Dans la question a2, nous avons déterminé l'optimum qui correspond à : x = 3,84.

Sachant que x représente les quantités commandées en milliers, la recette maximale est obtenue pour :
=> **3,84 * 1 000 soit 3 840 unités.**